

第2讲 二次函数图象专题（一）

一、 a 、 b 、 c 、 Δ 、特殊值的符号

1. a 、 b 、 c 、 Δ

二次函数： $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$			
	推导	字母的符号	图象特征
开口方向	a	$a > 0$	开口向上
		$a < 0$	开口向下
对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$	b	$b = 0$	对称轴为 y 轴
		$ab > 0$ (a 、 b 同号)	对称轴在 y 轴的左侧
		$ab < 0$ (a 、 b 异号)	对称轴在 y 轴的右侧
		总结：左同右异	
与 y 轴交点	c	$c = 0$	图象过 原点
		$c > 0$	与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴
		$c < 0$	与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴
与 x 轴交点	$b^2 - 4ac$	$b^2 - 4ac = 0$	与 x 轴有唯一交点（抛物线顶点落在 x 轴）
		$b^2 - 4ac > 0$	与 x 轴有两个不同交点
		$b^2 - 4ac < 0$	与 x 轴无交点

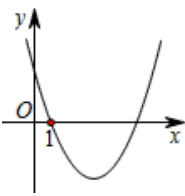
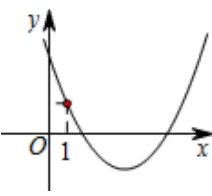
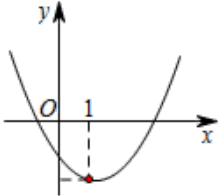
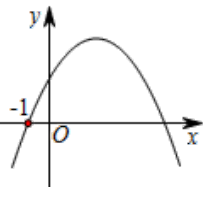
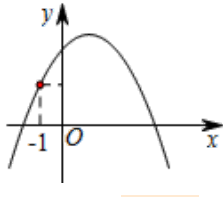
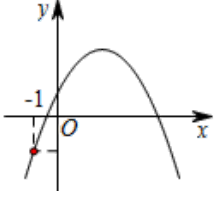
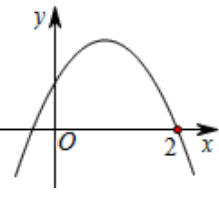
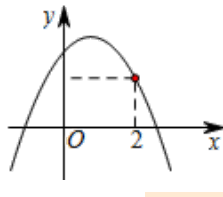
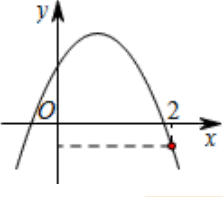
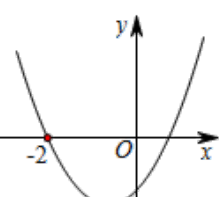
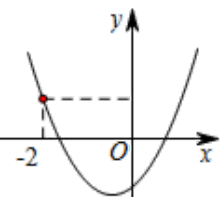
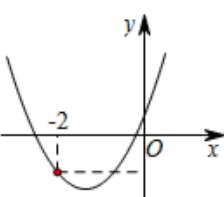
【备注】 ① 抛物线的开口大小由 $|a|$ 确定， $|a|$ 越大，抛物线的开口越小； $|a|$ 越小，抛物线的开口越大。

当两个二次函数中 $|a|$ 相等时，两函数的图象的形状和大小相同。

② a 、 b 的符号共同决定了对称轴，“左同右异”，即对称轴在 y 轴左侧， a 和 b 同号；对称轴在 y 轴右侧， a 和 b 异号。

③ $b^2 - 4ac$ 与 0 的关系决定了抛物线与 x 轴的交点个数：利用 $b^2 - 4ac$ 的正负可确定函数与 x 轴的交点个数；反过来根据函数图象与 x 轴的情况，也可确定 $b^2 - 4ac$ 的正负

2. 二次函数特殊值

代数式值	自变量取值	图象举例		
$a + b + c$	$x = 1$	 $a + b + c = 0$	 $a + b + c > 0$	 $a + b + c < 0$
$a - b + c$	$x = -1$	 $a - b + c = 0$	 $a - b + c > 0$	 $a - b + c < 0$
$4a + 2b + c$	$x = 2$	 $4a + 2b + c = 0$	 $4a + 2b + c > 0$	 $4a + 2b + c < 0$
$4a - 2b + c$	$x = -2$	 $4a - 2b + c = 0$	 $4a - 2b + c > 0$	 $4a - 2b + c < 0$

【备注】 特殊值这部分，不局限于 ± 1 、 ± 2 ；此外还会考察 $\pm \frac{1}{2}$ 、 ± 3 ；

当 $x = \pm \frac{1}{2}$ 时， $y = \frac{1}{4}a \pm \frac{1}{2}b + c$ ；当 $x = \pm 3$ 时， $y = 9a \pm 3b + c$

可利用函数上该点在 x 轴上方或下方判断特殊值的正负

根据参数判断函数图象

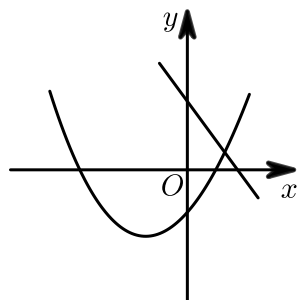
1.

2020~2021学年9月浙江杭州江干区杭州市采荷中学初三上学期月考（杭州市采荷中学教育集团）第7题3分

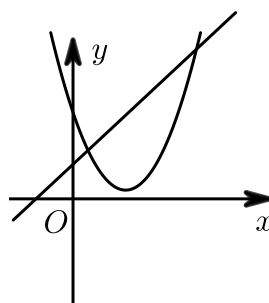
★★★

函数 $y = ax + b$ 和 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一平面直角坐标系内的图象大致是（ ）.

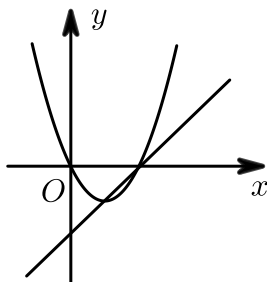
A.



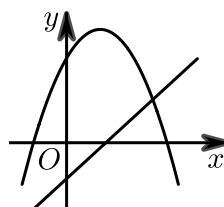
B.



C.



D.



【答案】C

【解析】因为 $y = ax + b$ 过第一、二、四象限，

所以 $a < 0$ ， $b > 0$ ，

因为 $y = ax^2 + bx + c$ ，由图象得 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c < 0$ ，故 A 错误；

$y = ax + b$ 过第一、二、三象限，

所以 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $y = ax^2 + bx + c$ 由图象得 $a > 0$ ， $b < 0$ ， $c > 0$ ，故 B 错误；

$y = ax + b$ 过第一、三、四象限，

所以 $a > 0$ ， $b < 0$ ，

因为 $y = ax^2 + bx + c$ 由图象得 $a > 0$ ， $b < 0$ ， $c = 0$ ，故 C 正确；

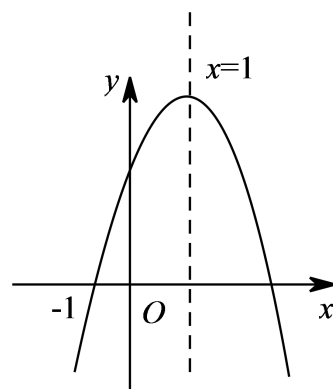
$y = ax + b$ 过第一、三、四象限，

所以 $a > 0$ ， $b < 0$ ，

因为 $y = ax^2 + bx + c$ 由图象得 $a < 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，故 D 错误。

2. 2016~2017学年重庆涪陵区大顺中学初三上学期期中第9题4分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 有下列4个结论: ① $abc > 0$; ② $b < a + c$; ③ $4a + 2b + c > 0$; ④ $b^2 - 4ac > 0$; 其中正确的结论有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】 ①: 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0 .$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = 1 ,$$

$$\therefore b = -2a > 0 .$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = c > 0 ,$$

$$\therefore abc < 0 , \text{ ①错误 ;}$$

$$\text{②当 } x = -1 \text{ 时, } y < 0 ,$$

$$\therefore a - b + c < 0 ,$$

$$\therefore b > a + c , \text{ ②错误 ;}$$

$$\text{③: 抛物线的对称轴为 } x = 1 ,$$

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时与 } x = 0 \text{ 时, } y \text{ 值相等 ,}$$

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = c > 0 ,$$

$$\therefore 4a + 2b + c = c > 0 , \text{ ③正确 ;}$$

$$\text{④: 抛物线与 } x \text{ 轴有两个不相同的交点 ,}$$

$$\therefore \text{一元二次方程 } ax^2 + bx + c = 0 ,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0 , \text{ ④正确 .}$$

综上所述: 成立的结论有 2 个 .

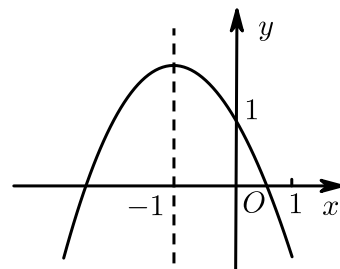
故选: B .

【标注】 【题型】 图象与系数的关系

3. 2019~2020学年10月天津和平区天津市耀华中学初三上学期月考第11题3分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $(0, 1)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，下列结论：①

$a + b + c < 0$ ；② $a - b + c > 1$ ；③ $abc > 0$ ；④ $4a - 2b + c < 0$ ；⑤ $c - a > 1$ ，其中正确的序号为（
）。



A. ②③④⑤

B. ①③④⑤

C. ①②④⑤

D. ①

【答案】 D

【解析】 ①由图象可知，当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，

$\therefore a + b + c < 0$ ，①正确；

②由图象可知，当 $x = -1$ 时， $y > 1$ ，

$\therefore a - b + c > 1$ ，②正确；

③由图象可知， $a < 0$ ， $c > 0$ ， $-\frac{b}{2a} = -1$ ，

$\therefore b < 0$ ，

$\therefore abc > 0$ ，③正确；

④：抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ，

且与 x 轴的一个交点在 $(0, 0)$ 与 $(1, 0)$ 之间，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点在 $(-3, 0)$ 与 $(-2, 0)$ 之间，

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时， $y > 0$ ，

$\therefore 4a - 2b + c > 0$ ，④错误；

⑤：抛物线经过点 $(0, 1)$ ，

$\therefore c = 1$ ，

$\therefore a < 0$ ，

$\therefore c - a > 1$ ，⑤正确。

综上所述，①②③⑤正确，故选 D。

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

二、 a 、 b 、 c 、最值、平方差之间的关系

1. a 、 b 之间的关系

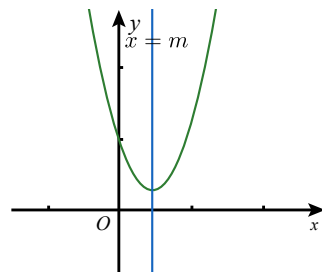
利用二次函数对称轴为： $x = -\frac{b}{2a}$ 推导。

例如：

已知函数对称轴为 m ，则令 $-\frac{b}{2a} = m$ ，即可得到 $b = -2am$ 。

思考：

若将条件改为：已知函数对称轴在 $(m, 0)$ 的右侧，应该如何推导。



【备注】 a 、 b 的等量关系不局限在等式，若已知对称轴的范围也可求出 a 、 b 的不等关系，但是在解不等时一定要注意开口方向，即 a 的正负，当 $a < 0$ 时，同乘 a 时不等式的符号要变
思考题解析：

易得 $-\frac{b}{2a} = m$ ，①当 $a > 0$ 时，可得 $b < -2am$ ，②当 $a < 0$ 时，可得 $b > -2am$

！注意：小学就学习过的0乘任何数均得0

实际上求解 a 、 b 之间关系时，与 0 进行比较没有很大的意义，只可得到 a 、 b 之间的正负关系，但实际上正负关系我们通过图象是完全可以直接求出的。（这部分内容为学生的易错

点，如：通过 $-\frac{b}{2a} > 0$ ，往往会得出 $b > -2a$ 的错误答案）

2. a 、 c 之间的关系

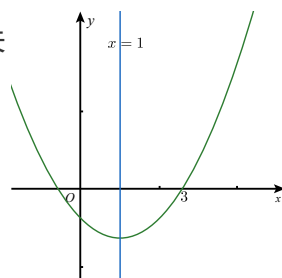
①先根据对称轴求出 a 、 b 的等量关系，然后在特殊值中将 b 进行替换。

例如：

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(3, 0)$ ，对称轴为 $x = 1$ ，求 a 、 c 之间的关系。

由对称轴为 $x = 1$ 可得， $b = -2a$ ；由过点 $(3, 0)$ ，可得 $9a + 3b + c = 0$ ；

将 $b = -2a$ 代入到等式中，即可得到 $c = -3a$ 。



②若已知二次函数与 x 轴的两个交点坐标，可直接利用韦达定理 $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 。

如上述问题，可直接由 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -3$ ，得 $c = -3a$ 。

【备注】 应用韦达定理求解 a 、 c 关系的前提是已知二次函数与 x 轴的两个交点坐标

3. b 、 c 之间的关系

经过了上述内容的学习，求解 b 、 c 之间的关系与上述方法类似，在特殊值中替换 a 即可。

4. 二次函数的最值

知识回顾：

二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

当自变量取值范围为全体实数时，二次函数的最值一定在 顶点 处取得：

开口向 上 时，二次函数有最 小 值；开口向 下 时，二次函数有最 大 值 .

！总结：

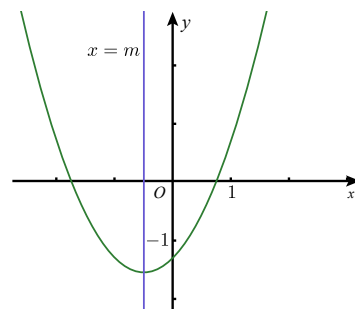
①最小值意味着比所有的函数值都 小；同理最大值意味着比所有的函数值都 大；因此根据图象，可比较最值与其余函数值的大小关系 .

②当题目中出现 $b^2 - 4ac$ 时，除了要考虑 Δ 外，二次函数中顶点纵坐标 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 也含有这个形式；因此根据图象中二次函数最值的位置，可利用最值的意义求出 $b^2 - 4ac$ 与 a 或其它参数的关系.

例如：

如图可得，① $am^2 + bm + c < a + b + c$

$$\textcircled{2} \frac{4ac - b^2}{4a} < -1$$



【备注】 最值这部分中对于： $am^2 + bm + c < a + b + c$ 这个类型，还可能以其它的形式出现，比如左右两侧的 c 需要 we 根据不等式的性质同 $+c$ ，或 $m(am + b)$ 需要我们将代数式展开，解题时灵活运用、举一反三

5. 平方差

知识回顾：

平方差公式： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

【备注】 求解二次函数图象与系数关系这部分，要善于发现平方差公式，进而将问题转化为判断特殊值的正负

栗子3

a、b 与 c 之间的关系

4. 2021年天津河西区初三中考一模第12题3分 ★★

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，当 $x < -1$ 时， y 随着 x 的增大而减小 . 有下列结论：

- ① $abc > 0$ ；
- ② 若点 $A(-3, y_1)$ ，点 $B(3, y_2)$ 都在抛物线上，则 $y_1 < y_2$ ；
- ③ $a + b > 0$. 其中，正确结论的个数为 () .

A. 0

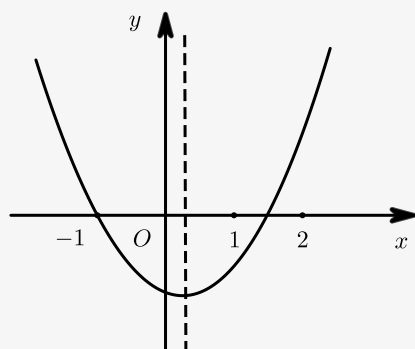
B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】如图，



∵ 抛物线开口向上，

∴ $a > 0$ ，∵ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧，∴ $b < 0$ ，∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，∴ $c < 0$ ，∴ $abc > 0$ ，所以①的结论正确；∵ 抛物线过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，

$$\therefore 0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} + -\frac{b}{2a} = \frac{a+b}{2a} > 0,$$

∴ $a + b > 0$ ，

所以③的结论正确；

∵ 点 $A(-3, y_1)$ 到对称轴的距离比点 $B(3, y_2)$ 到对称轴的距离远，∴ $y_1 > y_2$ ，

所以②的结论错误。

故选 C。

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

5. 2019年天津津南区初三中考二模第12题3分 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 与 $(0, -3)$ 之间（不包括这两点），对称轴为直线 $x = 2$ 。

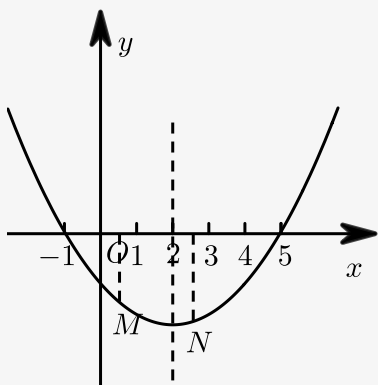
下列结论：① $abc > 0$ ；② $9a + 3b + c < 0$ ；③若点 $M\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$ ，点 $N\left(\frac{5}{2}, y_2\right)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1 < y_2$ ；④ $-\frac{24}{5} < a + b + c < -\frac{16}{5}$ 。其中正确结论的个数是（ ）。

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】 B**【解析】** $\because$ 图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$,与 y 轴交点 B 在 $(0, -2)$ 与 $(0, -3)$ 之间,对称轴为 $x = 2$, $\therefore a > 0, b < 0, c < 0$, $\therefore$ ① $abc > 0$ 正确;② 当 $x = 3$ 时,

$$y = 9a + 3b + c,$$

 $\therefore 9a + 3b + c < 0$ 正确;③ 若点 $M\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$, 点 $N\left(\frac{5}{2}, y_2\right)$

是函数图象上的两点,

 $\therefore y_1 > y_2$, $\therefore$ ③ 错误;

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

当 $x = -1$ 时,

$$ax^2 + bx + c,$$

$$= a - b + c,$$

$$= a + 4a + c,$$

$$= 5a + c,$$

$$\therefore 5a + c = 0,$$

$$c = -5a,$$

$$\therefore -3 < c < -2,$$

$$\therefore -\frac{24}{5} < \frac{8}{5}c < -\frac{16}{5},$$

 $\therefore$ ④ 正确.

栗子4

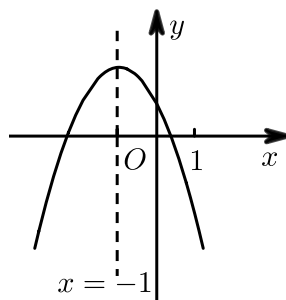
 $am^2 + bm + c$ 型最值

6. 2015年天津东丽区初三中考二模第12题3分 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图，给出下列四个结论：

① $4ac - b^2 < 0$. ② $4a + c < 2b$. ③ $3b + 2c < 0$. ④ $m(am + b) + b < a (m \neq -1)$,

其中正确结论的个数是 () .



A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】B

【解析】∵ 抛物线和 x 轴有两个交点，

$$\therefore b^2 - 4ac > 0 ,$$

$$\therefore 4ac - b^2 < 0 , \therefore \text{①正确} .$$

∵ 对称轴是直线 $x = -1$, 和 x 轴的一个交点在点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 0)$ 之间 ,

∴ 抛物线和 x 轴的另一个交点在 $(-3, 0)$ 和 $(-2, 0)$ 之间 ,

$$\therefore \text{把 } (-2, 0) \text{ 代入抛物线得 : } y = 4a - 2b + c > 0 ,$$

$$\therefore 4a + c > 2b , \therefore \text{②错误} .$$

$$\therefore \text{把 } x = 1 \text{ 代入抛物线得 : } y = a + b + c < 0 ,$$

$$\therefore 2a + 2b + 2c < 0 ,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1 ,$$

$$\therefore b = 2a ,$$

$$\therefore 3b + 2c < 0 , \therefore \text{③正确} .$$

∵ 抛物线的对称轴是直线 $x = -1$,

∴ $y = a - b + c$ 的值最大 ,

$$\text{即把 } x = m (m \neq -1) \text{ 代入得 : } y = am^2 + bm + c < a - b + c ,$$

$$\therefore am^2 + bm + b < a ,$$

$$\text{即 } m(am + b) + b < a , \therefore \text{④正确} .$$

即正确的有 3 个 .

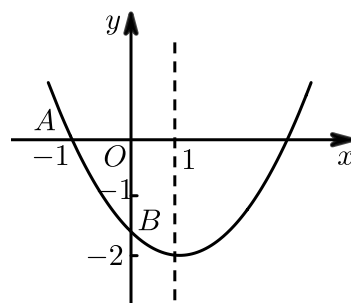
【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

栗子5

 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 型最值

7. 2020~2021 学年天津南开区天津市南开翔宇学校初三下学期开学考试第 12 题 3 分 ★★

如图, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 和 $(0, -1)$ 之间 (不包含这两点), 对称轴为直线 $x = 1$. 在下列结论中: ① $abc > 0$; ② $16a + 4b + c < 0$; ③ $4ac - b^2 < 8a$; ④ $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$; ⑤ $b < c$. 正确结论的个数为 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】①: 函数开口方向向上,

$\therefore a > 0$.

$\therefore$ 对称轴在 y 轴右侧,

$\therefore ab$ 异号.

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点在 y 轴负半轴,

$\therefore c < 0$,

$\therefore abc > 0$, 故①正确;

②: 图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 图象与 x 轴的另一个交点为 $(3, 0)$,

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时, $y > 0$,

$\therefore 16a + 4b + c > 0$, 故②错误;

③: 图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$,

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $y = (-1)^2 a + b \times (-1) + c = 0$,

$\therefore a - b + c = 0$, 即 $a = b - c$, $c = b - a$.

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore -\frac{b}{2a} = 1$, 即 $b = -2a$,
 $\therefore c = b - a = (-2a) - a = -3a$,
 $\therefore 4ac - b^2 = 4 \cdot a(-3a) - (-2a)^2 = -16a^2 < 0$,
 $\therefore 8a > 0$,
 $\therefore 4ac - b^2 < 16a$, 故③正确;
 ④: 图象与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 和 $(0, -1)$ 之间,
 $\therefore -2 < c < -1$,
 $\therefore -2 < -3a < -1$,
 $\therefore \frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$, 故④正确;
 ⑤: $a > 0$,
 $\therefore b - c > 0$,
 $\therefore b > c$, 故⑤错误.
 故正确的结论为①③④.
 故选 C.

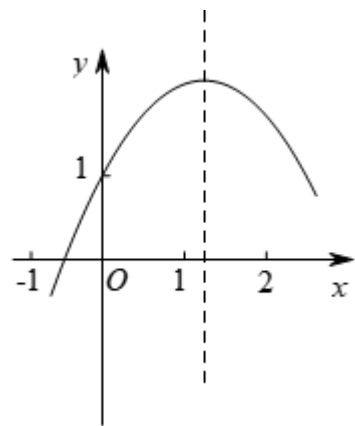
【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

栗子6

平方差

8. 2017~2018学年10月天津河西区天津市第四十一中学初三上学期月考第12题3分 ★★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示, 在下列五个结论中: ① $abc < 0$; ② $4a + 2b + c > 0$; ③ $(a + c)^2 < b^2$; ④ $2a - b < 0$ 正确的有 () 几个.



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 C

【解析】 ① 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

对称轴在 y 轴右侧，根据“左同右异”，

得 $b > 0$ ，

又 $\because$ 抛物线与 y 轴交于正半轴，

$\therefore c > 0$ ，

$\therefore abc < 0$ 正确，

② $\because x = 2$ 时，抛物线在 x 轴上方，

$\therefore 4a + 2b + c > 0$ 正确，

③ $\because x = 1$ 时，抛物线在 x 轴上方，

$x = -1$ 时，抛物线在 x 轴下方，

$\therefore (a + b + c)(a - b + c) < 0$ ，

$\therefore (a + c)^2 < b^2$ 正确，

④ $\because$ 对称轴在 $x = 1$ 右侧，

$\therefore -\frac{b}{2a} > 1$ ，

$\therefore -b < 2a$ ，

$\therefore 2a + b > 0$ ，

④ 错误，

$\therefore$ ①②③ 正确。

【标注】【能力】推理论证能力

9. 2019年天津河东区初三中考一模第12题3分 ★★

已知：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 经过点 $(-1, 0)$ ，且满足 $4a + 2b + c > 0$ ，以下结论：①

$a + b > 0$ ；② $a + c > 0$ ；③ $-a + b + c > 0$ ；④ $b^2 - 2ac > 5a^2$ ，其中正确的有（ ）。

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 将 $(-1, 0)$ 代入抛物线得，

$$a - b + c = 0，$$

$$\because 4a + 2b + c > 0，$$

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时，} y > 0。$$

$$\because c = b - a，$$

$$\therefore 4a + 2b + b - a > 0，$$

$$\text{即 } 3a + 3b > 0，$$

$$\therefore a + b > 0，① \text{ 正确。}$$

$$\because b = a + c，$$

$$\therefore 4a + 2a + 2c + c > 0 ,$$

$$\text{即 } 6a + 3c > 0 ,$$

$$\text{即 } 2a + c > 0 ,$$

$$\therefore a < 0 ,$$

$$\therefore a + c > 0 , \text{ ②正确 .}$$

$$\text{由①②正确得 , } 2a + b + c > 0 ,$$

$$\text{又 } a < 0 , \therefore -3a > 0 , \therefore -a + b + c > 0 , \text{ ③正确 .}$$

$$\therefore b = a + c ,$$

$$\begin{aligned} \therefore (a+c)^2 - 2ac - 5a^2 \\ = a^2 + 2ac + c^2 - 2ac - 5a^2 \\ = c^2 - 4a^2 \end{aligned}$$

$$= (c+2a)(c-2a) ,$$

$$\therefore a + c > 0 , -3a > 0 ,$$

$$\therefore c - 2a > 0 ,$$

$$\therefore c + 2a > 0 , c - 2a > 0 ,$$

$$\therefore (a+c)^2 - 2ac > 5a^2 ,$$

$$\text{即 } b^2 - 2ac > 5a^2 , \text{ ④正确 .}$$

故选 D .

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

三、 x轴交点距离、线段关系

1. x轴交点距离

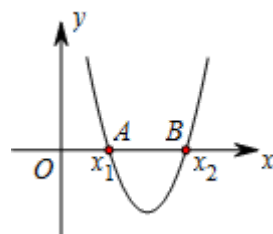
知识回顾：

当 $\Delta > 0$ 时，求二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴的交点坐标：

即令 $y = 0$ ，可得： $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ， $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

因此， x 轴两个交点的距离：

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

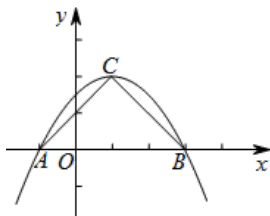


抛物线与轴交点和顶点构成特殊三角形：

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，点 C 是抛物线的顶点。

① 当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，则 $\Delta =$ _____；

② 当 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $\Delta =$ _____。



依题可知 $C \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ ， $AB = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ 。

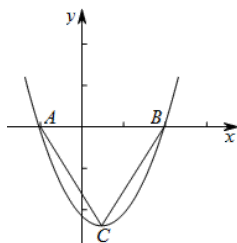
当 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形时，则 2

$$\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|},$$

整理得， $\frac{b^2 - 4ac}{|2a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ ，即 $\Delta = 2\sqrt{\Delta}$

$$, \Delta^2 - 4\Delta = 0,$$

$$\because \Delta > 0, \therefore \Delta = 4.$$



当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，则 $\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ ，

整理得， $\frac{b^2 - 4ac}{|4a|} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$ ，即

$$\Delta = 2\sqrt{3} \times \sqrt{\Delta}, \Delta^2 - 12\Delta = 0,$$

$$\because \Delta > 0, \therefore \Delta = 12.$$

【备注】 注意这个结论是指二次函数与 x 轴的两个交点及顶点组成的特殊三角形；推导时利用特殊直角三角形的三边关系即可

栗子7

10. 2020~2021学年天津河北区初三上学期期末第10题3分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的顶点为 D ，其图象与 x 轴的交点 A 、 B 的横坐标分别为 -1 ， 3 ，与 y 轴负半轴交于点 C 。在下面四个结论中：

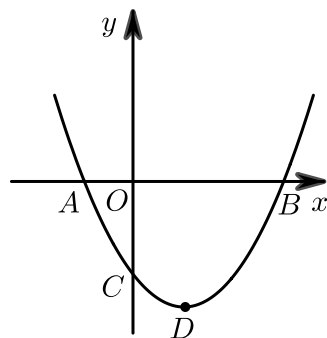
① $a + b + c < 0$ ；

② $a = -\frac{1}{3}c$ ；

③ 只有当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形；

④ 使 $\triangle ACB$ 为等腰三角形的 a 值可以有两个。

其中正确的结论有 ()。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 ①: 图象与 x 轴的交点 A, B 的横坐标分别为 $-1, 3$,

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

抛物线顶点在第四象限, 即 $x = 1$ 时 $y = a + b + c < 0$, 故①正确;

$$\text{②} \because A \text{ 点坐标为 } (-1, 0),$$

$$\therefore a - b + c = 0, \text{ 而 } b = -2a,$$

$$\therefore a + 2a + c = 0, \text{ 即 } c = -3a, a = -\frac{1}{3}c, \text{ 故②正确};$$

③要使 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形, 必须保证 D 到 x 轴的距离等于 AB 长的一半;

D 到 x 轴的距离就是当 $x = 1$ 时 y 的值的绝对值.

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = a + b + c,$$

$$\text{即 } |a + b + c| = 2,$$

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时 } y < 0,$$

$$\therefore a + b + c = -2,$$

又: 图象与 x 轴的交点 A, B 的横坐标分别为 $-1, 3$,

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时 } y = 0, \text{ 即 } a - b + c = 0,$$

$$x = 3 \text{ 时 } y = 0, \text{ 即 } 9a + 3b + c = 0,$$

解这三个方程可得 $b = -1, a = \frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}$, 故③正确;

④要使 $\triangle ACB$ 为等腰三角形,

则必须保证 $AB = BC = 4$ 或 $AB = AC = 4$ 或 $AC = BC$,

当 $AB = BC = 4$ 时,

$$\therefore BO = 3, \triangle BOC \text{ 为直角三角形},$$

又: OC 的长即为 $|c|$,

$$\therefore c^2 = 16 - 9 = 7,$$

$\therefore$ 由抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上,

$$\therefore c = -\sqrt{7},$$

与 $2a + b = 0$ 、 $a - b + c = 0$ 联立组成解方程组，解得 $a = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ；

同理当 $AB = AC = 4$ 时，

$\therefore AO = 1$ ， $\triangle AOC$ 为直角三角形，

又 $\therefore OC$ 的长即为 $|c|$ ，

$$\therefore c^2 = 16 - 1 = 15,$$

$\therefore$ 由抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上，

$$\therefore c = -\sqrt{15},$$

与 $2a + b = 0$ 、 $a - b + c = 0$ 联立组成解方程组，解得 $a = \frac{\sqrt{15}}{3}$ ；

同理当 $AC = BC$ 时，

$$\text{在 } \triangle AOC \text{ 中, } AC^2 = 1 + c^2,$$

$$\text{在 } \triangle BOC \text{ 中 } BC^2 = c^2 + 9,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore 1 + c^2 = c^2 + 9, \text{ 此方程无解.}$$

经解方程组可知只有两个 a 值满足条件，所以④正确；

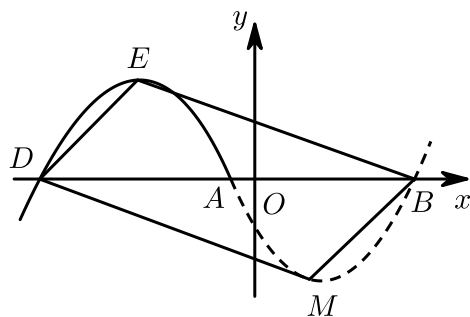
所以正确的是①②③④。

故选 D。

【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

11. 2018年天津北辰区初三中考一模第12题3分 ★★★★★

如图，已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧）， M 为顶点，将抛物线 C_1 绕点 A 旋转 180° ，得抛物线 C_2 ，点 B ， M 旋转后的对称点为 D ， E 。若四边形 $DMBE$ 为矩形，则 $b^2 - 4ac$ 的值是（ ）。



A. 6

B. 9

C. 12

D. 18

【答案】 C

【解析】 $\therefore$ 抛物线 C_1 绕点 A 旋转 180° 得抛物线 C_2 ，

$\therefore C_1, C_2$ 两条抛物线开口大小相同，

$\therefore DE = BM$ 且 $DE \parallel BM$ ，

∴ 四边形 $DEBM$ 为平行四边形，

若四边形 $DEBM$ 为矩形，

∴ $ME = BD$ ，

$$\therefore |BD| = 2|AB| = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}，$$

$$|ME| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}\right)^2 + \left[\frac{2(4ac - b^2)}{4a}\right]^2}$$

∴ $|BD|^2 = |ME|^2$ ，解得：

$$\frac{4(b^2 - 4ac)}{a^2} = \frac{5(b^2 - 4ac)}{4a^2}，$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 12。$$

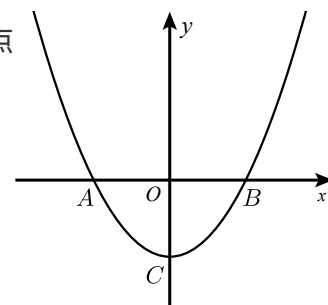
【标注】【知识点】二次函数与特殊平行四边形

2. 线段关系

如右图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与坐标轴交于 A 、 B 、 C 三点

① 若 $OA = OC$ ，则 $C(0, c)$ ， $A(c, 0)$

② 若 $OB = OC$ ，则 $C(0, c)$ ， $B(-c, 0)$



【备注】得到 A 、 B 点坐标后，就可以直接将点坐标代入到函数解析式中

如将上述 A 点代入可得， $ac^2 + bc + c = 0$ ，即 $ac + b + 1 = 0$

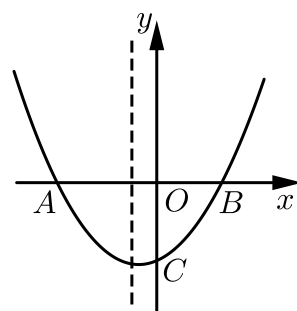
栗子8

12. 2021年天津河北区初三中考二模第12题3分 ★★

如图抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$) 的图象交 x 轴于 $A(-2, 0)$ 和点 B ，交 y 轴负半轴于点 C ，且 $OB = OC$ ，下列结论：

① $c = 2b - 2$ ；② $a = \frac{1}{2}$ ；③ $b = ac + 1$ ；④ $\frac{a+b}{c} < 0$ 。

其中正确的个数是 ()。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 $\because$ 二次函数开口向上，与 y 轴交于负半轴，

$$\therefore a > 0, c < 0,$$

$\therefore$ 对称轴在 y 轴左侧，

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

$$\therefore a + b > 0,$$

$$\therefore \frac{a+b}{c} < 0, \text{ 故④结论正确；}$$

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = c$ ，

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(0, c)$ ，

$\therefore c < 0$ 且 $OB = OC$ ，

$\therefore$ 点 B 坐标为 $(-c, 0)$ ，

将 $B(-c, 0)$ 代入，得：

$$ac^2 - bc + c = 0,$$

$$\therefore ac - b + 1 = 0 \text{ 即 } b = ac + 1,$$

故③结论正确；

$\therefore$ 二次函数图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ ， $B(-c, 0)$ ，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 $x_1 = -2$ ， $x_2 = -c$ ，

$\therefore$ 由根与系数的关系可知 $(-2) \times (-c) = \frac{c}{a}$ ，

$$\text{即 } 2c = \frac{c}{a},$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \text{ 故②结论正确；}$$

将 $a = \frac{1}{2}$ 代入 $b = ac + 1$ ，得：

$$\frac{1}{2}c + 1 = b,$$

$\therefore c = 2b - 2$ ，故①结论正确，

综上所述，结论正确有①②③④，共 4 个。

故选 D。

【标注】 【知识点】 关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题